Devoir surveillé n° 6 - Correction

Exercice 1. (*d'après CCINP 2019*)

Partie I - Isométrie de $\mathbb{R}^3$

Soit A la matrice définie par $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Q1. Montrer que $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.

Méthode 1 : on revient à la définition :

$$A^\top A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_3.$$

Méthode 2 : on montre que les colonnes de A sont deux à deux orthogonales et toutes de norme 1.
Dans les deux cas, on obtient $\boxed{A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})}$.

Q2. L'isométrie associée à la matrice A est-elle directe ou indirecte ?

On calcule le déterminant de A en développant selon la deuxième colonne :

$$\det(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\Big(\sqrt{2}[\sqrt{2}+\sqrt{2}] - \sqrt{2}[-\sqrt{2}-\sqrt{2}]\Big) = 1,$$

donc $\boxed{\text{l'isométrie associée à } A \text{ est directe}}$.

Q3. Démontrer que $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}(\vec{u})$ où $\vec{u}$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - I_3)$. On a $(A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{2}(x - \sqrt{2}y + z) = x \\ \frac{1}{2}(\sqrt{2}x - \sqrt{2}z) = y \\ \frac{1}{2}(x + \sqrt{2}y + z) = z \end{cases} \overset{\times 2}{\iff} \begin{cases} -x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ \sqrt{2}x - 2y - \sqrt{2}z = 0 \\ x + \sqrt{2}y - z = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + \sqrt{2}L_1}{\iff}} \begin{cases} -x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ 4y = 0 \end{cases}$$

i.e. $\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$ d'où $\boxed{\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}(\vec{u}) \text{ avec } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

Q4. Soit $\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, calculer $\det(\vec{\jmath}, A\vec{\jmath}, \vec{u})$.

Tout d'abord, on a $A\vec{\jmath} = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Ainsi

$$\det(\vec{\jmath}, A\vec{\jmath}, \vec{u}) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \overset{\text{lin. } C_2}{=} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{dvp. } C_1}{=} \frac{1}{2} \times (-1) \times \begin{vmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = \boxed{\sqrt{2}}.$$

Q5. Déterminer les caractéristiques de l'isométrie associée à A dans $\mathbb{R}^3$.

D'après **Q2**, l'isométrie canoniquement associée à A est directe, il s'agit donc d'une rotation.
D'après **Q3**, l'axe de la rotation est $\mathrm{Vect}(\vec{u})$. Il ne reste qu'à déterminer l'angle θ de cette rotation.
D'abord, on a $1 + 2\cos\theta = \mathrm{Tr}(A) = 1$ donc $\cos\theta = 0$, *i.e.* $\theta = \pm\pi/2$.
De plus, $\sin\theta$ est du signe de $\det(\vec{u}, \vec{x}, A\vec{x}) = \det(\vec{x}, A\vec{x}, \vec{u})$ pour tout vecteur $\vec{x}$ non colinéaire à $\vec{u}$. En particulier, pour $\vec{x} = \vec{\jmath}$, d'après **Q4**, on obtient $\sin\theta > 0$ et donc $\theta = +\pi/2$.
Par conséquent, $\boxed{\text{l'isométrie associée à } A \text{ est une rotation d'axe } \mathrm{Vect}(\vec{u}) \text{ et d'angle } \pi/2}$.

Partie II - Espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2 et E l'ensemble des matrices de taille 2, réelles et symétriques.
Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$, on pose $\varphi(M, M') = aa' + 2bb' + cc'$.

Q6. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que $\dim(E) = 3$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in E$. On peut écrire $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc on obtient $E = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. En particulier $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

Montrons maintenant que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre. Soient λ, μ, $\nu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

i.e. $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $\lambda = \mu = \nu = 0$. La famille est donc libre, elle forme ainsi une base de E et en particulier $\boxed{\dim(E) = 3}$.

Q7. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$ et $M'' = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ b'' & c'' \end{pmatrix}$ trois matrices de E et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Symétrie* : $\varphi(M, M') = aa' + 2bb' + cc' = a'a + 2b'b + c'c = \varphi(M', M)$.
- *Linéarité à gauche* :
$$\begin{aligned}\varphi(\lambda M + M', M'') &= \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda b + b' & \lambda c + c' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ b'' & c'' \end{pmatrix}\right) \\ &= (\lambda a + a')a'' + 2(\lambda b + b')b'' + (\lambda c + c')c'' \\ &= \lambda[aa'' + 2bb'' + cc''] + [a'a'' + 2b'b'' + c'c''] \\ &= \lambda\varphi(M, M'') + \varphi(M', M'').\end{aligned}$$
- *Linéarité à droite* : découle de la symétrie et de la linéarité à gauche.
- *Positivité* : $\varphi(M, M) = a^2 + 2b^2 + c^2 \geqslant 0$ comme somme de carrés de réels.
- *Caractère défini* : On suppose $\varphi(M, M) = 0$, *i.e.* $a^2 + 2b^2 + c^2 = 0$. Comme c'est une somme de termes positifs, on a nécessairement $a^2 = 2b^2 = c^2 = 0$ donc $a = b = c = 0$, *i.e.* $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_E$.

On a ainsi montré que $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E}$.

Q8. Soit $\mathcal{B}$ la famille définie par : $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.
Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

Notons $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tout d'abord, ces trois matrices sont bien des éléments de E.
On a $\varphi(M_1, M_2) = 1 \times 0 + 2 \times 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \times 0 = 0$ et de même $\varphi(M_1, M_3) = \varphi(M_2, M_3) = 0$ donc la famille $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3)$ est orthogonale.
De plus, $\|M_1\|^2 = 1^2 + 2 \times 0^2 + 0^2 = 1$, $\|M_2\|^2 = 0^2 + 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 = 1$ et de même $\|M_3\| = 1$.
On a donc montré que $\mathcal{B}$ est une famille orthonormée de E. En particulier elle est libre. Comme elle comporte trois éléments et, d'après **Q6**, $\dim(E) = 3$, on en déduit que $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base orthonormée de } E}$.

Partie III - Application linéaire sur E

On considère E muni du produit scalaire φ défini dans la partie II.
On définit l'application f sur E par : $\forall M \in E$ avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $f(M) = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} - b & \frac{a-c}{2} \\ \frac{a-c}{2} & \frac{a+c}{2} + b \end{pmatrix}$.

Q9. Montrer que f est un endomorphisme de E.

- Tout d'abord, pour toute matrice M de E, on a $f(M) \in E$.
- Montrons maintenant que f est linéaire. Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda M + M') &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda b + b' & \lambda c + c' \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda a + a' + \lambda c + c'}{2} - (\lambda b + b') & \frac{\lambda a + a' - (\lambda c + c')}{2} \\ \frac{\lambda a + a' - (\lambda c + c')}{2} & \frac{\lambda a + a' + \lambda c + c'}{2} + (\lambda b + b') \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} - b & \frac{a-c}{2} \\ \frac{a-c}{2} & \frac{a+c}{2} + b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a'+c'}{2} - b' & \frac{a'-c'}{2} \\ \frac{a'-c'}{2} & \frac{a'+c'}{2} + b' \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(M) + f(M'). \end{aligned}$$

On a ainsi montré que $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E}$.

Q10. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Il suffit de calculer les images par f des éléments de $\mathcal{B}$ et de les exprimer dans cette base. En reprenant les notations de **Q8**, on a

$$f(M_1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} M_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} M_2 + \frac{1}{2} M_3.$$

De même $f(M_2) = -\frac{\sqrt{2}}{2} M_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} M_3$ et $f(M_3) = \frac{1}{2} M_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} M_2 + \frac{1}{2} M_3$. On obtient alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \boxed{A}.$$

Q11. À l'aide de la partie I, déterminer une base $\mathcal{B}'$ de E telle que la matrice B de f dans cette base soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après **Q5**, l'isométrie g canoniquement associée à A est la rotation d'axe $\mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ et d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

On pose $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (on a normé le vecteur qui dirige l'axe de rotation) puis on choisit $e_2 = \vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est orthogonal à e_1 et enfin on pose $e_3 = e_1 \wedge e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \overset{\theta=\pi/2}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Comme $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on pose $N_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times M_1 + 0 \times M_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times M_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on pose $N_2 = 0 \times M_1 + 1 \times M_2 + 0 \times M_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme $e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on pose $N_3 = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}M_1 + 0 \times M_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}M_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La famille (N_1, N_2, N_3) est alors une base de E (démonstration de la liberté analogue à celle de **Q6** + contient 3 vecteurs et $\dim(E) = 3$) et on a $\boxed{\mathrm{Mat}_{(N_1,N_2,N_3)}(f) = B}$.

Q12. Montrer que f conserve la trace et le déterminant.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a $f(M) = \begin{pmatrix} \dfrac{a+c}{2} - b & \dfrac{a-c}{2} \\ \dfrac{a-c}{2} & \dfrac{a+c}{2} + b \end{pmatrix}$. En particulier :

$$\mathrm{Tr}(f(M)) = \frac{a+c}{2} - b + \frac{a+c}{2} + b = a + c = \mathrm{Tr}(M)$$

donc $\boxed{f \text{ conserve la trace}}$ et

$$\begin{aligned} \det(f(M)) &= \left(\frac{a+c}{2} - b\right)\left(\frac{a+c}{2} + b\right) - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}\right)\left(\frac{a+c}{2} - \frac{a-c}{2}\right) - b^2 \\ &= ac - b^2 \\ &= \det(M) \end{aligned}$$

donc $\boxed{f \text{ conserve le déterminant}}$.

Exercice 2. (*d'après CCINP 2021*)
On rappelle que pour x réel strictement positif et α réel, on note $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$.
On considère la fonction $g\colon x \longmapsto x^x$ et on pose $I =]0\,;+\infty[$ son ensemble de définition.

Partie I - Étude de la fonction g

Q13. Calculer $g(1)$ et justifier que g est dérivable sur I.

- On a $\boxed{g(1) = 1^1 = 1}$.
- On écrit, pour tout $x \in I$, $g(x) = \mathrm{e}^{x \ln x}$. Ainsi la $\boxed{\text{fonction } g \text{ est dérivable sur } I}$ comme composée et produit de fonctions qui le sont, le logarithme étant bien défini pour $x > 0$.

Q14. Dresser le tableau de variations de g et préciser ses limites aux bornes de I.

Pour tout $x \in I$, par dérivation de composée et de produit :

$$g'(x) = (x \ln x)' \,\mathrm{e}^{x \ln x} = (\ln(x) + 1)\,\mathrm{e}^{x \ln x}.$$

Comme $\mathrm{e}^{x \ln x} > 0$, $g'(x)$ est du signe de $\ln(x) + 1$. Or $\ln(x) + 1 \geqslant 0 \iff \ln x \geqslant -1 \iff x \geqslant \mathrm{e}^{-1}$.
La limite en $+\infty$ ne pose pas de problème. Pour la limite en 0, on a par croissances comparées $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \mathrm{e}^0 = 1$. On obtient ainsi :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
g	$\Vert$ 1	$\searrow$	$\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Q15. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe représentative de g.

On sait que l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = g'(1)(x-1) + g(1)$. Comme $g(1) = 1$ et $g'(1) = 1$, on obtient $y = 1 \times (x-1) + 1$, *i.e.* $\boxed{y = x}$.

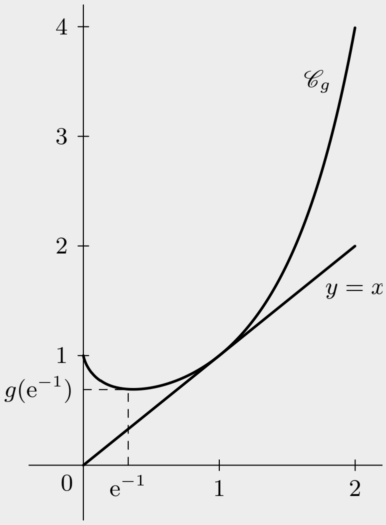
Q16. On admet que $g(x) \underset{x \to 1}{=} 1 + (x-1) + (x-1)^2 + o\big((x-1)^2\big)$. Déterminer la position relative de la tangente au point d'abscisse 1 par rapport à la courbe représentative de g.

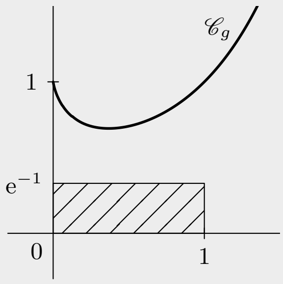
Comme la tangente a pour équation $y = x$, pour déterminer sa position relative avec la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de g, on étude le signe de $g(x) - x$ au voisinage de 1. Or, par le résultat admis dans l'énoncé :

$$g(x) - x \underset{x \to 1}{=} (x-1)^2 + o\big((x-1)^2\big) \geqslant 0.$$

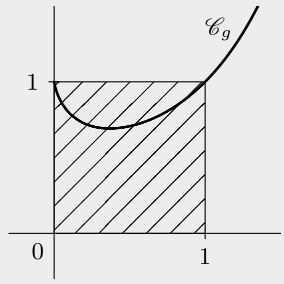
Ainsi, $\boxed{\text{la courbe } \mathscr{C}_g \text{ est au-dessus de sa tangente}}$ au voisinage de 1.

Q17. Représenter sur l'intervalle $]0\,;2]$ la courbe représentative de g et la tangente obtenue dans la question précédente sur le même graphique.
On donne $\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$ et $g(\mathrm{e}^{-1}) \approx 0{,}69$.





Minoration pour **Q18**



Majoration pour **Q18**

Q18. En utilisant le graphique, justifier l'encadrement $\mathrm{e}^{-1} < \displaystyle\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x < 1$.

Remarquons d'abord que cette intégrale est bien convergente puisque d'après **Q14**, g est prolongeable par continuité en 0.

Les inégalités souhaitées sont illustrées ci-dessus.

Remarque : On aurait aussi pu procéder par calculs : d'après le tableau de variations, on a pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $g(\mathrm{e}^{-1}) \leqslant g(x) \leqslant 1$. *Or* $g(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}} > \mathrm{e}^{-1}$, *d'où* $\mathrm{e}^{-1} < g(x) \leqslant 1$. *En intégrant sur* $[0\,;1]$, *on obtient* $\boxed{\mathrm{e}^{-1} < \displaystyle\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x < 1}$ *(la dernière inégalité est clairement stricte d'après le graphique).*

Remarque : dans tous les cas, il aurait été plus naturel de minorer par $g(\mathrm{e}^{-1})$ *que par* e^{-1}.

Partie II - Un calcul d'intégrales

Q19. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{n+1}}.$$

Q20. Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Justifier que la fonction $x \longmapsto x^n(\ln x)^k$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement prend la valeur 0 en 0.

Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Comme $n > 0$, par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to 0} x^n(\ln x)^k = 0$. Autrement dit la fonction $\boxed{x \longmapsto x^n(\ln x)^k \text{ est prolongeable par continuité en 0 en lui donnant pour valeur 0}}$.

Dans la suite, on notera la fonction prolongée de la même façon.

Q21. Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 x^n(\ln x)^k \,\mathrm{d}x = -\frac{k}{n+1}\int_0^1 x^n(\ln x)^{k-1} \,\mathrm{d}x.$$

La fonction $x \longmapsto x^n(\ln x)^k$ est continue sur $]0\,;1]$. Soit $X \in]0\,;1]$.

On pose $\begin{cases} u = (\ln x)^k \\ v' = x^n \end{cases}$ donc $\begin{cases} u' = \frac{k}{x}(\ln x)^{k-1} \\ v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[X\,;1]$. Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_X^1 x^n (\ln x)^k \, \mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^k\right]_X^1 - \int_X^1 \frac{k}{x}(\ln x)^{k-1}\frac{x^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{d}x \\ &= 0 - \frac{X^{n+1}}{n+1}(\ln X)^k - \frac{k}{n+1}\int_X^1 x^n(\ln x)^{k-1}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

D'une part, d'après la question précédente, le premier terme tend vers 0 lorsque X tend vers 0. D'autre part, toujours d'après la question précédente, la fonction dans l'intégrale du membre de droite est continue sur $[0\,;1]$ (car $k-1 \in \mathbb{N}$ puisque $k \in \mathbb{N}^*$) donc l'intégrale $\int_0^1 x^n(\ln x)^{k-1}\,\mathrm{d}x$ est convergente, *i.e.* par définition de la convergence, $\lim\limits_{X\to 0}\int_X^1 x^n(\ln x)^{k-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n(\ln x)^{k-1}\,\mathrm{d}x$.
Finalement, on a obtenu

$$\boxed{\int_0^1 x^n(\ln x)^k\,\mathrm{d}x = -\frac{k}{n+1}\int_0^1 x^n(\ln x)^{k-1}\,\mathrm{d}x}.$$

Remarque : vu l'enchaînement des questions, on pourrait faire directement l'intégration par parties sur $[0\,;1]$ *puisque tout converge même si cela n'est pas totalement dans l'esprit du programme de TSI.*

Q22. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire par récurrence sur k, que pour tout entier naturel k, on a :

$$\int_0^1 x^n(\ln x)^k\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}.$$

Justifier que cette égalité est encore vraie pour $(n,k) = (0,0)$.

Propriété à démontrer : Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(k)$: « $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 x^n(\ln x)^k\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}$ ».
Initialisation : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'une part $\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{Q19}}{=} \frac{1}{n+1}$ et d'autre part $\frac{(-1)^0 0!}{(n+1)^{0+1}} = \frac{1}{n+1}$. Ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n(\ln x)^{k+1}\,\mathrm{d}x &\overset{\textbf{Q21}}{=} -\frac{k+1}{n+1}\int_0^1 x^n(\ln x)^k\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\mathscr{P}(k)}{=} -\frac{k+1}{n+1}\times\frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(n+1)^{k+2}} \end{aligned}$$

i.e. $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \int_0^1 x^n(\ln x)^k\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}}.$$

- Lorsque $(n,k) = (0,0)$, on a d'une part $\int_0^1 x^0(\ln x)^0\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x = 1$ et d'autre par $\frac{(-1)^0 0!}{(0+1)^{0+1}} = 1$

donc $\boxed{\text{l'égalité reste vraie pour } (n,k) = (0,0)}$.

Partie III - Expression de $\displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une série

Q23. Rappeler le développement en série entière de $z \mapsto \mathrm{e}^z$ ainsi que son rayon de convergence.

D'après le cours, $\boxed{\mathrm{e}^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ avec } R = +\infty}$.

Q24. Justifier que $\displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(x\ln x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x$.

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{x\ln x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x\ln x)^n}{n!}\right)\mathrm{d}x && \textit{d'après la question précédente}\\
&= \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(x\ln x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x} && \textit{par intégration terme à terme}
\end{aligned}$$

Remarque : cette dernière égalité n'est en fait pas totalement justifiée par le théorème d'intégration terme à terme (mais on ne peut pas faire mieux avec le programme de TSI) car ce dernier est valable pour intégrer sur un intervalle $[a\,;b]$ inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Or ici le DSE est valable sur $I =]0\,;+\infty[$ (à cause du $\ln x$) mais $[0\,;1] \not\subset I$.

Q25. En déduire l'égalité $\displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$.

D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x\\
&\overset{\textit{Q22}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \times \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}\\
&= \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}}
\end{aligned}$$

Remarque : cette égalité est parfois appelée « rêve du deuxième année », voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%AAve_du_deuxi%C3%A8me_ann%C3%A9e`

Q26. À l'aide du critère spécial des séries alternées, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ est convergente.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{(n+1)^{n+1}}$ de façon qu'on s'intéresse à la série $\sum (-1)^n u_n$.
Tout d'abord, on a immédiatement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Montrons maintenant que la suite (u_n) est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $1 \leqslant n+1 < n+2$ d'où, en élevant à la puissance $n+1$, l'inégalité $(n+1)^{n+1} < (n+2)^{n+1}$ et ce dernier terme peut être majoré par $(n+2)^{n+2}$. En passant à l'inverse, il vient alors $u_n > u_{n+1}$, *i.e.* la suite (u_n) est (strictement) décroissante.
Par conséquent, comme la suite (u_n) est positive, décroissante et de la limite nulle, d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente, *i.e.* $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \text{ est convergente}}$.

Q27. Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ le reste au rang p de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ et on admet l'inégalité $|R_p| \leqslant \frac{1}{(p+2)^{p+2}}$.

Dans le langage Python, écrire une fonction `approximation(e)` qui prend en paramètre un nombre réel strictement positif `e` et qui renvoie un nombre réel représentant l'approximation de $\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x$ dont l'erreur maximale commise est `e`.

Donner ensuite une valeur approchée de $\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x$ à $\frac{1}{27}$ près.

D'après la question précédente, la somme partielle $S_p = \sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ est une valeur approchée de $\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x$ avec une erreur valant $|R_p|$. On aura donc l'approximation souhaitée dès que $|R_p| \leqslant$ `e` et donc a fortiori dès que $\frac{1}{(p+2)^{p+2}} \leqslant$ `e` d'après le résultat admis dans l'énoncé.

On peut donc proposer la fonction suivante dans laquelle on procède à un calcul classique de somme avec un test à chaque étape pour savoir si on a atteint la précision suffisante :

```python
def approximation(e: float) -> float:
    n = 0
    somme = (-1)**n / (n+1)**(n+1)  # Valeur de S_0
    while 1/(n+2)**(n+2) > e:
        n = n + 1
        somme = somme + (-1)**n / (n+1)**(n+1)
    return somme
```

On peut aussi décomposer notre démarche en deux fonctions, l'une pour calculer la somme et l'autre pour trouver l'approximation recherchée.

```python
def somme(p: int) -> float:
    """ Calcul de S_p. """
    total = 0
    for n in range(p+1):
        total = total + (-1)**n / (n+1)**(n+1)
    return total

def approximation(e: float) -> float:
    p = 0
    while 1/(p+2)**(p+2) > e:
        p = p + 1
    return somme(p)
```

- On a $\frac{1}{(p+2)^{p+2}} \leqslant \frac{1}{27} \iff p+2 \geqslant 3 \iff p \geqslant 1$ donc S_1 est une valeur approchée de l'intégrale à $\frac{1}{27}$ près où

$$S_1 = \frac{(-1)^0 0!}{(0+1)^{0+1}} + \frac{(-1)^1 1!}{(1+1)^{1+1}} = 1 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

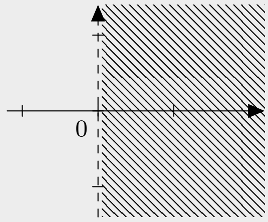
Remarque : l'appel `approximation(1/27)` *donne bien 0,75 comme valeur approchée à $\frac{1}{27}$ près. Par ailleurs, il n'existe pas d'expression simple de la valeur exacte de cette intégrale, juste la valeur approchée* 0,783 430.

Partie IV - Étude d'un point critique

Soit f la fonction de deux variables définie par $f\colon (x,y) \longmapsto x^y - x$.

Q28. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et le représenter dans le plan.

On peut écrire $f(x,y) = x^y - x = \mathrm{e}^{y\ln(x)} - x$ donc la seule contrainte est la stricte positivité de x afin que $\ln(x)$ soit bien défini.
Autrement dit, $\boxed{D_f =]0\,;+\infty[\times\mathbb{R}}$.
Il s'agit donc du demi-plan situé à droite de l'axe des ordonnées, l'axe étant exclu.



Q29. Montrer que f admet un et un seul point critique dans D_f et vérifier que la valeur de f en ce point critique vaut 0.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_f comme composée de fonctions usuelles. On a, pour tout $(x,y) \in D_f$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x}\,\mathrm{e}^{y\ln(x)} - 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln(x)\,\mathrm{e}^{y\ln(x)}.$$

Or (x,y) est un point critique si et seulement si le gradient en ce point est nul, *i.e.*

$$\begin{cases} \frac{y}{x}\,\mathrm{e}^{y\ln(x)} - 1 = 0 \\ \ln(x)\,\mathrm{e}^{y\ln(x)} = 0 \end{cases} \overset{\mathrm{e}^a\neq 0}{\iff} \begin{cases} \frac{y}{x}\,\mathrm{e}^{y\ln(x)} = 1 \\ \ln(x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{f \text{ admet un unique point critique, de coordonnées } (1,1), \text{ et } f(1,1) = 1^1 - 1 = 0}$.

Q30. Montrer que : $f(1+h,\,1-h) \underset{h\to 0}{=} -h^2 + o(h^2)$.

On utilise les développements limités de ln puis de exp.

$$\begin{aligned}
f(1+h,\,1-h) &= \mathrm{e}^{(1-h)\ln(1+h)} - (1+h) \\
&\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{(1-h)\left(h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right)} - 1 - h && \textit{DL de } \ln \\
&\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{h - \frac{3}{2}h^2 + o(h^2)} - 1 - h \\
&\underset{h\to 0}{=} 1 + \left(h - \frac{3}{2}h^2\right) + \frac{1}{2!}\left(h - \frac{3}{2}h^2\right)^2 + o(h^2) - 1 - h && \textit{DL de } \exp \\
&\underset{h\to 0}{=} 1 + h - \frac{3}{2}h^2 + \frac{1}{2}h^2 - 1 - h + o(h^2) \\
&\underset{h\to 0}{=} \boxed{-h^2 + o(h^2)}.
\end{aligned}$$

On **admet** qu'on obtient de façon analogue $f(1+h,\,1+h) \underset{h\to 0}{=} h^2 + o(h^2)$.

Q31. Justifier que le point critique n'est pas un extremum.

D'une part, d'après la question précédente, on a $f(1+h,\,1-h) = -h^2 + o(h^2) < 0 = f(1,1)$ pour h au voisinage de 0.
De même, d'après le résultat admis, on a $f(1+h,\,1+h) > 0 = f(1,1)$ pour h au voisinage de 0.
Ainsi, $f(x,y) - f(1,1)$ change de signe au voisinage de $(1,1)$ donc $\boxed{(1,1) \text{ n'est pas un extremum de } f}$.

Exercice 3. Optimisation du choix d'une place de parking (*d'après CCINP 2019*)
Au départ, nous sommes au début de la rue. Par convention, nous poserons que le début de la rue a pour numéro 0. Devant chaque numéro n, il y a une place de parking qui peut être libre avec une probabilité $p \in]0\,;1[$. On suppose que p ne dépend pas de n et que les occupations des places sont indépendantes les unes par rapport aux autres.
Notre stratégie est la suivante : on se donne s un entier naturel. On roule sans interruption jusqu'au numéro s de la rue et on choisit la première place disponible à partir du numéro s (inclus).
On note X le numéro de la place libre trouvée par cette méthode.

Partie I - Loi de X

Q32. Donner l'univers-image de $X(\Omega)$.

Comme on commence à chercher une place à partir du numéro s et qu'on ne sait pas où cela peut finir, on a $\boxed{X(\Omega) = [\![s\,;+\infty[\![}$.

Q33. Déterminer la loi de X.

Pour $i \in \mathbb{N}$, on note L_i l'événement « la place numéro i est libre ». Soit $k \in [\![s\,;+\infty[\![$.

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= P(\overline{L_s} \cap \cdots \cap \overline{L_{k-1}} \cap L_k) \\
&= P(\overline{L_s}) \times \cdots \times P(\overline{L_{k-1}}) \times P(L_k) \quad \textit{indépendance des } L_i \\
&= (1-p) \times \cdots \times (1-p) \times p \\
&= p(1-p)^{k-s}.
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{X(\Omega) = [\![s\,;+\infty[\![\text{ et } \forall k \in X(\Omega),\ P(X=k) = p(1-p)^{k-s}}$.

Q34. Soit $Y = X - s + 1$. Montrer que Y est une loi géométrique de paramètre p dont on donnera l'espérance et la variance.

- Tout d'abord, comme d'après **Q32**, $X(\Omega) = [\![s\,;+\infty[\![$, on en déduit $Y(\Omega) = [\![1\,;+\infty[\![= \mathbb{N}^*$.

Ensuite, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= P(X-s+1=k) \\
&= P(X=k+s-1) \\
&\overset{\textbf{Q33}}{=} p(1-p)^{k+s-1-s} \\
&= p(1-p)^{k-1}.
\end{aligned}$$

On reconnaît donc que $\boxed{Y \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p}$.

- Enfin, d'après le cours, comme $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, on a directement $\boxed{E(Y) = \frac{1}{p} \text{ et } V(Y) = \frac{1-p}{p^2}}$.

Q35. En déduire l'espérance et la variance de X.

Par linéarité de l'espérance, on a

$$E(X) = E(Y+s-1) = E(Y) + s - 1 = \boxed{\frac{1}{p} + s - 1}.$$

Pour la variance, on sait que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et toute variable aléatoire Z admettant une variance, $V(aZ+b) = a^2V(Z)$ donc $\boxed{V(X) = 1^2V(Y) = \frac{1-p}{p^2}}$.

Partie II - Calcul de la distance moyenne à l'arrivée

On souhaite aller au numéro d de cette rue avec $d \in \mathbb{N}^*$. Notre stratégie reviendra à choisir un numéro s compris entre 0 et d. Pour rappel, $s = 0$ correspond à chercher une place dès le début de la rue.
La distance à l'objectif est $|X - d|$ et l'espérance $D_s = E(|X - d|)$ est la distance moyenne à l'arrivée (on admet que D_s existe).
Pour simplifier, on prend $p = \dfrac{1}{10}$ dans cette partie.

Q36. Établir que $D_s = S_1 + S_2$ avec $S_1 = \displaystyle\sum_{n=s}^{d}(d-n)P(X=n)$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{n=d+1}^{+\infty}(n-d)P(X=n)$.

D'après **Q32**, on sait que $X(\Omega) = [\![s\,;+\infty[\![$. On a

$$\begin{aligned}
D_s &= E(|X-d|) \\
&\overset{\textit{formule de transfert}}{=} \sum_{n=s}^{+\infty}|n-d|P(X=n) \\
&\overset{|n-d| = \begin{cases} d-n & si\ n \leqslant d \\ n-d & si\ n > d\end{cases}}{=} \sum_{n=s}^{d}(d-n)P(X=n) + \sum_{n=d+1}^{+\infty}(n-d)P(X=n) \\
&= \boxed{S_1 + S_2}.
\end{aligned}$$

Q37. Soit la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall k \geqslant 0,\ u_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}(k-i)\left(\frac{9}{10}\right)^i$.

Montrer que $\forall k \geqslant 0,\ u_{k+1} = \dfrac{9}{10}u_k + k + 1$. *On pourra effectuer un changement d'indice $j = i - 1$.*

Soit $k \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= \sum_{i=0}^{k+1}(k+1-i)\left(\frac{9}{10}\right)^i \\
&\overset{\textit{terme pour } i=0 \textit{ à part}}{=} k+1+\sum_{i=1}^{k+1}(k-(i-1))\left(\frac{9}{10}\right)^i \\
&\overset{j=i-1,\ \textit{cf indication}}{=} k+1+\sum_{j=0}^{k}(k-j)\left(\frac{9}{10}\right)^{j+1} \\
&= k+1+\frac{9}{10}\sum_{j=0}^{k}(k-j)\left(\frac{9}{10}\right)^j \\
&= \boxed{k+1+\frac{9}{10}u_k}.
\end{aligned}$$

Q38. Montrer, par récurrence, que pour tout $k \geqslant 0$, $u_k = 10k - 90 + 90\left(\dfrac{9}{10}\right)^k$.

Propriété à démontrer : Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(k)$: « $u_k = 10k - 90 + 90\left(\dfrac{9}{10}\right)^k$. »

Initialisation : D'une part $u_0 = \displaystyle\sum_{i=0}^{0}(0-i)\left(\frac{9}{10}\right)^i = 0$ et d'autre part $10\times 0 - 90 + 90\left(\dfrac{9}{10}\right)^0 = -90+90 = 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie.
D'abord, d'après la question précédente puis en utilisant $\mathcal{P}(k)$, on a

$$u_{k+1} = k+1+\frac{9}{10}u_k = k+1+\frac{9}{10}\left[10k-90+90\left(\frac{9}{10}\right)^k\right].$$

D'où en développant :

$$u_{k+1} = k+1+9k-81+90\left(\frac{9}{10}\right)^{k+1} = 10k-80+90\left(\frac{9}{10}\right)^{k+1} \underset{+10-10}{=} 10(k+1)-90+90\left(\frac{9}{10}\right)^{k+1},$$

donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a montré que $\boxed{\forall k \geqslant 0,\, u_k = 10k-90+90\left(\frac{9}{10}\right)^{k}}$.

Q39. Exprimer S_1 à l'aide de u_{d-s} puis donner l'expression de S_1 en fonction de d et s.

D'abord

$$S_1 = \sum_{n=s}^{d}(d-n)p(1-p)^{n-s} \underset{i=n-s}{=} \sum_{i=0}^{d-s}(d-s-i)p(1-p)^{i} \underset{p=\frac{1}{10}}{=} \frac{1}{10}\sum_{i=0}^{d-s}(d-s-i)\left(\frac{9}{10}\right)^{i} = \boxed{\frac{1}{10}u_{d-s}}.$$

Alors, d'après la question précédente

$$S_1 = \frac{1}{10}\left[10(d-s)-90+90\left(\frac{9}{1}\right)^{d-s}\right] = \boxed{d-s-9+9\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}}.$$

Q40. Justifier que $S_2 - S_1 = E(X-d)$. En déduire la valeur de S_2 puis D_s.

Par définition de S_1 et S_2, on a

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= \sum_{n=d+1}^{+\infty}(n-d)P(X=n) - \sum_{n=s}^{d}(d-n)P(X=n) \\ &= \sum_{n=d+1}^{+\infty}(n-d)P(X=n) + \sum_{n=s}^{d}(n-d)P(X=n) \\ &= \sum_{n=s}^{+\infty}(n-d)P(X=n) && \textit{relation de Chasles} \\ &= \boxed{E(X-d)} && \textit{formule de transfert} \end{aligned}$$

Ensuite, par linéarité de l'espérance, on a

$$E(X-d) = E(X) - d \overset{\text{Q35}}{=} \frac{1}{p} + s - 1 - d = 9 + s - d \quad \text{car } p = \frac{1}{10}.$$

On obtient ainsi

$$S_2 = E(X-d) + S_1 \overset{\text{Q39}}{=} (9+s-d) + d - s - 9 + 9\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s} = \boxed{9\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}}.$$

Enfin,

$$D_s \overset{\text{Q36}}{=} S_1 + S_2 = d - s - 9 + 18\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s} = \boxed{d-s-9+20\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s+1}}.$$

Remarque : cette dernière expression est bien le cas particulier pour $p = \frac{1}{10}$ de la formule admise au début de la partie suivante.

Partie III - Optimisation

On admet que, pour pour $p \in \left]0\,;1\right[$, $D_s = d - s + 1 - \dfrac{1}{p} + \dfrac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}$.

Q41. Simplifier $D_{s+1} - D_s$.

$$\begin{aligned}
D_{s+1} - D_s &= d-(s+1)+1-\frac{1}{p}+\frac{2}{p}(1-p)^{d-(s+1)+1} - \left[d-s+1-\frac{1}{p}+\frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}\right] \\
&= -1+\frac{2}{p}(1-p)^{d-s}[1-(1-p)] \\
&= \boxed{-1+2(1-p)^{d-s}}.
\end{aligned}$$

Q42. Étudier le signe de $D_{s+1} - D_s$.
En déduire que D_s est minimale pour s le plus petit entier strictement supérieur à α, avec $\alpha = d + \dfrac{\ln 2}{\ln(1-p)}$.

- D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
D_{s+1} - D_s \geqslant 0 &\iff -1+2(1-p)^{d-s} \geqslant 0 \\
&\iff (1-p)^{d-s} \geqslant \frac{1}{2} \\
&\iff (d-s)\ln(1-p) \geqslant -\ln 2 \\
&\iff d-s \leqslant \frac{-\ln 2}{\ln(1-p)} \qquad \text{car } \ln(1-p)<0 \\
&\iff s \geqslant d+\frac{\ln 2}{\ln(1-p)}.
\end{aligned}$$

En notant $\alpha = d + \frac{\ln 2}{\ln(1-p)}$, on a donc $D_{s+1} - D_s < 0$ si $s < \alpha$ et $D_{s+1} - D_s > 0$ si $s > \alpha$.

- D'après l'étude de signe précédente, en notant $\lfloor \alpha \rfloor$ la partie entière de α, on a $D_{\lfloor \alpha \rfloor + 1} \leqslant D_{\lfloor \alpha \rfloor}$ et $D_{\lfloor \alpha \rfloor + 2} \geqslant D_{\lfloor \alpha \rfloor + 1}$ donc le minimum est atteint pour $s = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ qui est bien, par définition de la partie entière, le plus petit entier strictement supérieur à α.

Q43. Dans cette question uniquement, on s'intéresse à l'exemple pour lequel $p = \dfrac{1}{10}$.
En utilisant l'encadrement $2^{-1/6} < 0{,}9 < 2^{-1/7}$, à quelle distance de l'arrivée doit-on commencer à chercher une place ?

D'après l'encadrement donné, on a $\dfrac{-1}{6}\ln 2 < \ln(0{,}9) < \dfrac{-1}{7}\ln 2$. En passant à l'inverse et en multipliant par $\ln 2$, il vient $-6 > \dfrac{\ln 2}{\ln(0{,}9)} > -7$. En ajoutant d et en remarquant que $0{,}9 = 1 - \dfrac{1}{10} = 1 - p$, on obtient $\boxed{d-6 > \alpha > d-7}$.
Ainsi, le plus petit entier strictement supérieur à α est $d-6$ donc, d'après la question précédente, on doit commencer à $\boxed{\text{chercher une place à partir du numéro } d-6}$ (ou à partir du numéro 0 si $d-6<0$).

Q44. Simulation : recopier et compléter le programme en Python suivant pour simuler notre stratégie.

```python
def Bernoulli(q):
    return random() < q

def distance(s, d, p):
    Y = s                    # On commence à chercher au numéro s
    while Bernoulli(1-p):    # Tant que la place n'est pas libre
        Y = Y + 1            # On avance au numéro suivant
    return abs(Y - d)        # Distance à l'objectif
```

La fonction `Bernoulli` simule une variable de Bernoulli Y. Elle prend comme paramètre un nombre à virgule flottante `q`. La variable `q` correspond au paramètre de la variable de Bernoulli Y. Elle renvoie un booléen qui vaut `True` si $Y = 1$ et `False` si $Y = 0$.

La fonction `distance` simule notre stratégie. Elle prend comme paramètres les entiers `s` et `d` et un nombre à virgule flottante `p`. Ces variables correspondent aux valeurs introduites dans les sections précédentes. Elle renvoie un entier représentant la distance à parcourir en sortant de la voiture.

FIN